УДК 515.12

©2006р. І.З. Стасюк

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ОПЕРАТОРИ ОДНОЧАСНОГО ПРОДОВЖЕННЯ ПСЕВДОМЕТРИК, ЗАДАНИХ НА ОПУКЛИХ ТІЛАХ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто оператор одночасного продовження неперервних псевдометрик, визначених на деякому класі замкнених підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Результат, отриманий для цього класу, є в деякій мірі аналогом результату Е. Д. Тимчатина та М. Зарічного, отриманого для випадку компактного простору.

We consider operators simultaneously extending continuous pseudometrics defined on a certain class of closed subsets of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Our result obtained for this class, with the assumption that the underlying space in general is not compact, is similar to that obtained by E. D. Tymchatyn and M. M. Zarichnyi for compact spaces.

1. Вступ. Е. Д. Тимчатин та М. Зарічний розглядали задачу одночасного продовження часткових неперервних псевдометрик, заданих на замкнених підмножинах компактного метризовного топологічного простору (див. [1]). Для множини часткових псевдометрик з топологією В'єторіса доведене існування лінійного неперервного оператора одночасного продовження. Оператор продовження побудований авторами за допомогою теореми Фришковського про неперервну селекцію для багатозначних відображень (див. [5]). Неперервний оператор одночасного продовження напівнеперервних зверху псевдометрик, визначених на опуклих замкнених підмножинах компактного локально опуклого простору, побудований в [6]. При цьому множина часткових псевдометрик, ототожнених зі своїми субграфіками, розглядалася в топології Фелла, а оператор продовження визначений за допомогою відображення метричної проекції.

У цій статті ми розглянемо оператор одночасного продовження неперервних псевдометрик, заданих на деякому класі замкнених підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$, а саме, на множині опуклих тіл. Будемо використовувати теорему про селекцію Брессана та Коломбо, яка є аналогом результату Фришковського для некомпактного випадку.

2. Позначення та допоміжні факти. Нагадаємо деякі факти з теорії гіперпросторів, а також введемо позначення. Нехай Y — гаусдорфовий топологічний простір. Позначимо через $\mathrm{CL}(Y)$ множину всіх непорожніх замкнених підмножин простору Y. Передбаза топології Фелла $\mathcal{T}_F$ на множині $\mathrm{CL}(Y)$ складається з усіх множин вигляду $U^- = \{A \in \mathrm{CL}(Y) \mid A \cap U \neq \varnothing\}$, де U — непорожня відкрита підмножина простору Y та всіх множин вигляду $V^+ = \{A \in \mathrm{CL}(Y) \mid A \subset V\}$, де V — непорожня відкрита підмножина простору Y з компактним доповненням. Відомо, що простір $(\mathrm{CL}(Y), \mathcal{T}_F)$ є польським тоді і лише тоді, коли простір Y локально компактний з другою аксіомою зліченності ([2]). Будемо використовувати позначення A^c, $\mathrm{int}(A)$ та $\overline{A}$ для доповнення, внутрішності та замикання підмножини A заданого топологічного простору.

Для довільної замкненої підмножини A простору Y розглянемо множину $\mathcal{PM}_c(A)$ всіх неперервних псевдометрик, визначених на множині A. Очевидно, що множина $\mathcal{PM}_c(A)$ замкнена відносно операції поточкового додавання псевдометрик

$$s\colon \mathcal{PM}_c(A) \times \mathcal{PM}_c(A) \to \mathcal{PM}_c(A)$$

та множення на невід'ємне число

$$c : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{PM}_c(A) \to \mathcal{PM}_c(A)$$

для кожного $A \in \mathrm{CL}(Y)$. Будемо писати $\mathrm{dom}(\sigma) = A$, якщо $\sigma \in \mathcal{PM}_c(A)$, $A \in \mathrm{CL}(Y)$. Введемо топологію на множині $\mathcal{PM}_c(A)$ наступним чином. Кожну псевдометрику σ з $\mathcal{PM}_c(A)$ можна ототожнити з її графіком

$$\Gamma_\sigma = \{(x, y, t) \in A \times A \times \mathbb{R}_+ : t = \sigma(x, y)\} \in$$
$$\in \mathrm{CL}(Y \times Y \times \mathbb{R}).$$

Будемо розглядати множину часткових псевдометрик

$$\mathcal{PM}_c = \cup\{\mathcal{PM}_c(A) : A \in \mathrm{CL}(Y)\}$$

як підпростір простору $(\mathrm{CL}(Y \times Y \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_F)$.

Нехай U та K — довільні відповідно відкрита і компактна підмножини простору $Y \times Y$, a, b — довільні дійсні числа. Будемо використовувати наступні позначення (див. [3]):

$$[Y, U, a, b]^- = \mathcal{PM}_c(Y) \cap (U \times (a, b))^-,$$
$$[Y, K, a, b]^+ = \mathcal{PM}_c(Y) \cap ((K \times [a, b])^c)^+.$$

Тоді сім'я

$$\mathcal{F}(Y) = \{[Y, U, a, b]^- \mid U \text{ — відкрита в}$$
$$Y \times Y,\ a, b \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\cup \{[Y, K, a, b]^+ \mid K \text{ — компактна в}$$
$$Y \times Y,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

утворює передбазу топології Фелла на множині $\mathcal{PM}_c(Y)$ (див. [3]). Для кожної множини $A \in \mathrm{CL}(Y)$ передбазою топології Фелла на множині $\mathcal{PM}_c(A)$ є сім'я

$$\mathcal{F}(A) = \{[A, U, a, b]^- \mid U \text{ — відкрита в}$$
$$A \times A,\ a, b \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\cup \{[A, K, a, b]^+ \mid K \text{ — компактна в}$$
$$A \times A,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Відомо, що топологія Фелла $\mathcal{T}_F$ на множині неперервних дійсних функцій $C(Y)$ співпадає з компактно-відкритою топологією $\mathcal{T}_{co}$ на $C(Y)$ тоді і лише тоді, коли довільна компактна підмножина простору Y міститься у скінченному об'єднанні зв'язних компактних підмножин простору Y з непорожніми внутрішностями (див. [3]). Рівність топологій $\mathcal{T}_F$ і $\mathcal{T}_{co}$ на множині $C(Y)$ також має місце, коли простір Y локально компактний і локально зв'язний.

Для топологічного простору Z позначимо через $\mathbb{R}^Z$ множину всіх дійсних функцій на Z. Крім цього, нехай $\mathcal{P}(Z)$ — множина всіх непорожніх підмножин множини Z.

Для заданого банахового простору $(H, \|\cdot\|)$ позначимо через $L^1([0, T], H)$ банаховий простір функцій, інтегровних за Бохнером, які діють з інтервалу $[0, T]$ в простір H. Для довільної функції $u \in L^1([0, T], H)$,

$$\|u\| = \int_0^T \|u(t)\| dt.$$

Підмножина D простору $L^1([0, T], H)$ називається *розкладною*, якщо $u_1\chi(C) + u_2\chi([0, T] \setminus C) \in D$ для довільних функцій $u_1, u_2 \in D$ та множини $C \subset [0, T]$, де χ — індикатор. Нехай Y, Z — топологічні простори. Многозначне відображення $G : Y \to \mathcal{P}(Z)$ називається *напівнеперервним знизу*, якщо множина $V^* = \{y \in Y \mid G(y) \cap V \neq \varnothing\}$ відкрита в Y для довільної відкритої підмножини V простору Z. Сформулюємо теорему про селекцію Брессана та Коломбо (див. [4]), яку використаємо в наступному розділі.

Теорема 1. *Нехай Y — сепарабельний метричний простір, $G\colon Y \to \mathcal{P}(L^1([0, T], H))$ — напівнеперервне знизу багатозначне відображення, яке приймає замкнені розкладні значення. Тоді існує неперервне однозначне відображення $g\colon Y \to L^1([0, T], H)$ таке, що $g(y) \in G(y)$ для довільного $y \in Y$.*

3. Продовження псевдометрик. Нехай $X = \mathbb{R}^n$ — евклідовий простір зі стандартною нормою, що породжує стандартну метрику d на X. Нехай $S(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ та $\overline{S}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ — відповідно відкрита та замкнена куля радіуса ε з центром в точці $x \in X$. Позначимо через $\mathrm{CL}_1(X)$ підмножину простору $\mathrm{CL}(X)$, означену наступним чином:

$$\mathrm{CL}_1(X) = \{\overline{A} \subset X : A \text{ — відкрита}$$
$$\text{і опукла в } X\}.$$

Нехай $\mathcal{PM}'_c = \cup\{\mathcal{PM}_c(A) : A \in \mathrm{CL}_1(X)\}$. Розглядатимемо $\mathcal{PM}'_c$ як підпростір простору $\mathcal{PM}_c$ неперервних псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах простору X.

Означимо багатозначне відображення

$$G\colon X \times \mathrm{CL}_1(X) \to \mathcal{P}(L^1([0,1], X))$$

формулою

$$G(x,A) = \begin{cases} L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A))), \\ \text{ якщо } x \notin A; \\ L^1([0,1], \{x\}) \equiv \{x\}, \\ \text{ якщо } x \in A. \end{cases}$$

Значеннями оператора G є замкнені розкладні множини. Справді, цей факт є очевидним для $\{x\} \equiv L^1([0,1],\{x\})$. Для довільних $x \in X \setminus A$, $u_1, u_2 \in L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A)))$ та $C \subset [0,1]$ отримуємо $u_1\chi(C) + u_2\chi([0,T] \setminus C) \in L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A)))$.

Твердження 1. *Багатозначне відображення G є напівнеперервним знизу.*

Доведення. Доведемо, що для кожної відкритої підмножини V простору $L^1([0,1],X)$ множина

$$V^* = \{(x,A) \in X \times \mathrm{CL}_1(X) :$$
$$G(x,A) \cap V \neq \varnothing\}$$

відкрита в просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Зафіксуємо довільний елемент $(x_0, A_0) \in V^*$ і розглянемо два випадки.

1) Нехай $x_0 \notin A_0$. Для зручності позначимо $O(x,A) = A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A))$ для довільних $A \in \mathrm{CL}_1(X)$ та $x \in X \setminus A$. Тоді $G(x_0,A_0) = L^1([0,1], O(x_0,A_0))$. Оскільки $G(x_0,A_0) \cap V \neq \varnothing$, то існує функція $u \in G(x_0,A_0) \cap V$ та число $\varepsilon > 0$ такі, що $\{v \in L^1([0,1],X) : \|u-v\| < \varepsilon\} \subset V$. Виберемо число ε меншим, ніж $d(x_0,A_0)/8$. Можна знайти функцію $v \in L^1([0,1], O(x_0,A_0))$, яка набуває скінченну кількість значень, таку, що $\|u-v\| < \varepsilon/2$. Оскільки множина $O(x_0,A_0)$ опукла і внутрішність $\operatorname{int} O(x_0,A_0)$ непорожня, то можемо вважати, що всі значення функції v містяться у множині $S(x_0, 2d(x_0,A_0)) \cap A_0$. Нехай $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множина значень функції v. Виберемо довільне додатнє число $\delta < \varepsilon$ таке, що $S(x_i, \delta/2) \subset S(x_0, 2d(x_0,A_0))$ для всіх $i \in \{1,\ldots,k\}$. Крім цього нехай δ — достатньо мале, щоб виконувалась нерівність $d(x_0,x_i) < 2d(x_0,A_0) - 3\delta$. Очевидно, що $S(x_i,\delta/2) \cap A_0 \neq \varnothing$ для всіх $i \in \{1,\ldots,k\}$. Тепер нехай $U = S(x_0, \delta/2)$ і

$$W = \left[\bigcap_{i=1}^{k} S\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)\right]^- \cap$$
$$\cap \left[\overline{S}\left(x_0, d(x_0,A_0) - \frac{\delta}{2}\right)^c\right]^+.$$

Тоді множина $U \times W$ є околом точки (x_0,A_0) у просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Візьмемо довільну точку $(x,A) \in U \times W$. Тоді для кожного $i \in \{1,\ldots,k\}$ існує точка $z_i \in S(x_i,\delta/2) \cap A$. Крім цього $d(x,A) > d(x_0,A_0) - \delta$. Справді, якщо $y_0 \in A_0$ та $y \in A$ — точки такі, що $d(x_0,A_0) = d(x_0,y_0)$ і $d(x,A) = d(x,y)$, то отримаємо

$$d(x,A) = d(x,y) \geqslant d(x_0,y) - d(x_0,x) >$$
$$> d(x_0,A) - \delta/2 > d(x_0,A_0) - \delta/2 - \delta/2 =$$
$$= d(x_0,A_0) - \delta > 0.$$

Отже, $x \notin A$ і тому $G(x,A) = L^1([0,1], O(x,A))$. Тепер доведемо, що $d(x,z_i) < 2d(x,A)$ для кожного індекса $i \in \{1,\ldots,k\}$. Отримаємо

$$d(x,z_i) \leqslant d(x,x_i) + d(x_i,z_i) <$$
$$< d(x,x_i) + \frac{\delta}{2} \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,x_i) + \frac{\delta}{2} <$$
$$< \frac{\delta}{2} + d(x_0,x_i) + \frac{\delta}{2} = d(x_0,x_i) + \delta <$$
$$< 2d(x_0,A_0) - 2\delta < 2d(x,A)$$

для довільного $i \in \{1,\ldots,k\}$. Отже, $z_i \in O(x,A)$ для будь-якого $i \in \{1,\ldots,k\}$. Означимо функцію $v' \in L^1([0,1], O(x,A))$ наступним чином. Нехай $v'(t) = z_i$ для всіх $t \in [0,1]$ таких, що $v(t) = x_i$, $i \in \{1,\dots,k\}$. Тоді $\|v' - v\| < \delta/2 < \varepsilon/2$. Отже, $\|u - v'\| \leqslant \|u - v\| + \|v - v'\| < \varepsilon$ і ми отримуємо $v' \in G(x,A) \cap V$.

2) Нехай $x_0 \in A_0$. Тоді $G(x_0, A_0) = u_0 \in V$, де $u_0(t) = x_0$ для всіх $t \in [0,1]$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ таке, що $\{v \in L^1([0,1], X) : \|u_0 - v\| < \varepsilon\} \subset V$. Нехай $U = S(x_0, \varepsilon/3)$ і $W = S(x_0, \varepsilon/3)^-$. Очевидно, що множина $U \times W$ є околом точки (x_0, A_0) у просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Зафіксуємо довільну точку $(x,A) \in U \times W$. Якщо $x \in A$, то $G(x,A) = u$, де $u(t) = x$ на множині $[0,1]$. Оскільки $\|u - u_0\| < \varepsilon$, то отримаємо $u \in V \cap G(x,A)$. Тепер припустимо, що $x \notin A$. Оскільки $A \cap S(x_0, \varepsilon/3) \neq \varnothing$, бачимо, що $d(x,A) < 2\varepsilon/3$. Отже, існує точка $y \in A$така, що $d(x,y) = d(x,A) < 2\varepsilon/3$. Тоді для сталої функції $v \in L^1([0,1], O(x,A))$ з єдиним значенням y отримаємо $\|v - u_0\| \leqslant \|v - u\| + \|u - u_0\| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, а отже, $v \in V$. Твердження доведено.

За теоремою 1 існує неперервна селекція $g\colon X \times \mathrm{CL}_1(X) \to L^1([0,1], X)$ багатозначного відображення G. Означимо оператор $h\colon \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}} \to \mathbb{R}^{X \times X}$ наступною формулою:

$$h(\sigma)(x,y) = \int_0^1 \sigma(g(x, \mathrm{dom}(\sigma))(t), g(y, \mathrm{dom}(\sigma))(t))dt$$

для всіх $x,y \in X$. Оскільки для довільних елементів $x,y \in X$ функції $g(x, \mathrm{dom}(\sigma))$ та $g(y, \mathrm{dom}(\sigma))$ набувають свої значення у компактних підмножинах множини $\mathrm{dom}(\sigma)$, бачимо, що $h(\sigma)(x,y) < +\infty$.

Твердження 2 і 3 є аналогами допоміжних результатів, отриманих в [1].

Твердження 2. *Нехай $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ і K — компактна підмножина простору $\mathrm{dom}(\sigma)$. Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\int_0^1 \sigma(u(t), v(t))dt < \varepsilon$, де функції $u, v \in L^1([0,1], K)$ такі, що $\|u - v\| < \delta$.*

Доведення. Якщо $\sigma(x,y) = 0$ для всіх $x,y \in K \subset \mathrm{dom}(\sigma)$, то твердження очевидне. Припустимо, що $q = \max\{\sigma(x,y) : (x,y) \in K \times K\} > 0$ і нехай число $\varepsilon > 0$ — фіксоване. Оскільки псевдометрика σ рівномірно неперервна на множині $K \times K$, то існує $\delta_0 > 0$ таке, що $\sigma(x,y) < \varepsilon/2$ для всіх $x,y \in K$ таких, що $\|x - y\| < \delta_0$. Тепер виберемо додатне число $\delta < \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon\delta_0}{2q}\}$. Розглянемо довільні елементи $u, v \in L^1([0,1], K)$ такі, що $\|u - v\| < \delta$ і множину $C = \{t \in [0,1] : \|u(t) - v(t)\| \geqslant \delta_0\}$. Доведемо, що $\mu(C) \leqslant \frac{\varepsilon}{2q}$ (тут через μ позначаємо лебегову міру на інтервалі $[0,1]$). Припустимо, що має місце протилежне. Тоді

$$\delta > \int_C \|u(t) - v(t)\| dt + \int_{[0,1]\setminus C} \|u(t) - v(t)\| dt \geqslant \mu(C)\delta_0 > \frac{\varepsilon\delta_0}{2q},$$

суперечність. Отже,

$$\int_0^1 \sigma(u(t), v(t))dt = \int_C \sigma(u(t), v(t))dt + \int_{[0,1]\setminus C} \sigma(u(t), v(t))dt < \frac{\varepsilon q}{2q} + \int_{[0,1]\setminus C} \frac{\varepsilon}{2} dt \leqslant \varepsilon.$$

Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ і K — компактна підмножина простору $\mathrm{dom}(\sigma)$. Тоді відображення*

$$r_\sigma\colon L^1([0,1], K) \times L^1([0,1], K) \to \mathbb{R},$$

визначене формулою

$$r_\sigma(u,v) = \int_0^1 \sigma(u(t), v(t))dt,$$

рівномірно неперервне.

Доведення. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. За попереднім твердженням можна знайти число $\delta > 0$ таке, що для довільних $u, v \in L^1([0,1], K)$, для яких $\|u - v\| < \delta$, виконується нерівність $r_\sigma(u,v) < \varepsilon/2$. Виберемо функції $u_1, v_1, u_2, v_2 \in L^1([0,1], K)$ такі, що

$$\|u_1 - u_2\| < \delta \quad \text{і} \quad \|v_1 - v_2\| < \delta.$$

Отримаємо

$$|r_\sigma(u_1,v_1)-r_\sigma(u_2,v_2)|=$$
$$=\left|\int_0^1(\sigma(u_1(t),v_1(t))-\sigma(u_2(t),v_2(t)))\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^1|\sigma(u_1(t),v_1(t))-\sigma(u_1(t),v_2(t))|\,dt+$$
$$+\int_0^1|\sigma(u_1(t),v_2(t))-\sigma(u_2(t),v_2(t))|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^1\sigma\left(v_1(t),v_2(t)\right)dt+$$
$$+\int_0^1\sigma\left(u_1(t),u_2(t)\right)dt<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Твердження доведено.

Твердження 4. *Нехай $\sigma\in\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$. Тоді функція $h(\sigma)$ — неперервна псевдометрика на X.*

Доведення. Очевидно, що $h(\sigma)$ — псевдометрика на X. Для доведення неперервності $h(\sigma)$ візьмемо довільні послідовності $\{x_i\}$ та $\{y_i\}$ в X, збіжні до точок x та y відповідно. Нехай W_1 та W_2 — обмежені околи точок x та y відповідно. За властивостями селекції g, можна знайти компактні підмножини K_1 та K_2 простору $\mathrm{dom}(\sigma)$ такі, що $g(x',\mathrm{dom}(\sigma))\in L^1([0,1],K_1)$ для будь-якого $x'\in W_1$ і $g(y',\mathrm{dom}(\sigma))\in L^1([0,1],K_2)$ для будь-якого $y'\in W_2$. Тоді за твердженням 3, для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що $|r_\sigma(u_1,v_1)-r_\sigma(u_2,v_2|<\varepsilon$, якщо $\|u_1-u_2\|<\delta$ і $\|v_1-v_2\|<\delta$, $u_1,u_2,v_1,v_2\in L^1([0,1],K_1\cup K_2)$. Оскільки функція g неперервна, то можна знайти натуральне число k таке, що для всіх $n>k$ отримаємо $x_n\in W_1$, $y_n\in W_2$, $\|g(x_n,\mathrm{dom}(\sigma))-g(x,\mathrm{dom}(\sigma))\|<\delta$ і $\|g(y_n,\mathrm{dom}(\sigma))-g(y,\mathrm{dom}(\sigma))\|<\delta$. Отже, $|h(\sigma)(x_n,y_n)-h(\sigma)(x,y)|<\varepsilon$ для всіх $n>k$. Твердження доведено.

Твердження 5. *Оператор h продовжує псевдометрики з $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ на простір X.*

Доведення. Твердження очевидно випливає з властивостей селекції g. Якщо $\sigma\in\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ і $x,y\in\mathrm{dom}(\sigma)$, то $g(x,\mathrm{dom}(\sigma))=x$ і $g(y,\mathrm{dom}(\sigma))=y$. Отже, $h(\sigma)(x,y)=\sigma(x,y)$. Твердження доведено.

Твердження 6. *Для довільних псевдометрик $\sigma,\sigma'\in\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ та чисел $\lambda,\gamma\geqslant 0$, $h(\lambda\sigma+\gamma\sigma')=\lambda h(\sigma)+\gamma h(\sigma')$.*

Доведення. Твердження очевидно випливає з властивостей оператора h.

Твердження 7. *Оператор h неперервний.*

Доведення. Нехай K — довільна компактна підмножина простору $X\times X$ і нехай a,b — довільні дійсні числа такі, що $a<b$. Оскільки простір X локально компактний і зв'язний, то топологія Фелла на множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ співпадає з компактно-відкритою топологією на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$. Тому достатньо довести, що прообраз елемента передбази топології $\mathcal{T}_{co}$ на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ вигляду $M(K,a,b)=\{\rho\in\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X):\rho(K)\subset(a,b)\}$ відкритий у просторі $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$. Нехай $\sigma\in h^{-1}(M(K,a,b))$ і $B=\mathrm{dom}(\sigma)$. Тоді $h(\sigma)\in M(K,a,b)$ і можна знайти число $\varepsilon>0$ таке, що для всіх $(x,y)\in K$ отримаємо $a<h(\sigma)(x,y)-\varepsilon/2<h(\sigma)(x,y)+\varepsilon/2<b$. Потрібно знайти окіл O псевдометрики σ в $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ такий, що $\sigma\in O\subset h^{-1}(M(K,a,b))$. Оскільки простір B локально компактний і зв'язний, отримаємо $\mathcal{T}_F=\mathcal{T}_{co}$ на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B)$.

Існують замкнені кулі C_1 та C_2 в X такі, що для довільних $(x,y)\in K$ і $t\in[0,1]$ матимемо

$$(g(x,B)(t),g(y,B)(t))\in$$
$$\in(B\cap C_1)\times(B\cap C_2)\equiv K_1\times K_2.$$

Тоді $K_1\times K_2$ — компактна підмножина простору $B\times B$. Позначимо через q та Q відповідно найменше та найбільше значення псевдометрики σ на множині $K_1\times K_2$. Тепер означимо множини

$$D_1=\{(x,y,z)\in K_1\times K_2\times\mathbb{R}:$$
$$\sigma(x,y)+\tfrac{\varepsilon}{2}\leqslant z\leqslant Q+\varepsilon\}$$

і

$$D_2=\{(x,y,z)\in K_1\times K_2\times\mathbb{R}:$$
$$-\varepsilon\leqslant z\leqslant\sigma(x,y)-\tfrac{\varepsilon}{2}\}.$$

Очевидно, що D_1 і D_2 — компактні підмножини в $B \times B \times \mathbb{R}$. Оскільки графік псевдометрики σ не перетинає ні D_1, ні D_2, бачимо, що множина $O_1 = (D_1^c)^+ \cap (D_2^c)^+$ є околом псевдометрики σ в $\mathcal{PM}_c(B)$ у топології Фелла. Нехай

$$O_2 = \{\rho \in \mathcal{PM}_c(B) :$$
$$\rho(K_1 \times K_2) \subset \left(q - \tfrac{\varepsilon}{2}, Q + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\}.$$

Тоді множина O_2 — окіл псевдометрики σ в $\mathcal{PM}'_c$ у компактно-відкритій топології. Оскільки топології $\mathcal{T}_F$ і $\mathcal{T}_{co}$ співпадають на $\mathcal{PM}_c(B)$, то множина $O = O_1 \cap O_2$ є околом псевдометрики σ у просторі $\mathcal{PM}_c(B)$, а отже, у просторі $\mathcal{PM}'_c$. Зафіксуємо довільний елемент $\rho \in O$. Оскільки $-\varepsilon/2 < 0 \leqslant q \leqslant \rho(x', y') \leqslant Q < Q + \varepsilon/2$ для всіх (x', y'), бачимо, що єдиною можливістю, при якій графік псевдометрики ρ не перетинає ні D_1, ні D_2 є умова

$$\sigma(x', y') - \varepsilon/2 < \rho(x', y') < \sigma(x', y') + \varepsilon/2$$

для всіх $(x', y') \in K_1 \times K_2$. Тоді

$$|h(\rho)(x,y) - h(\sigma)(x,y)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |\rho(g(x,B)(t), g(y,B)(t)) -$$
$$- \sigma(g(x,B)(t), g(y,B)(t))|\, dt < \varepsilon$$

для всіх $(x, y) \in K$. Звідси отримаємо $h(\rho)(K) \subset (a, b)$. Твердження доведено.

Основний результат статті можна сформулювати так.

Теорема 2. *Існує відображення $h\colon \mathcal{PM}'_c \to \mathcal{PM}_c(X)$, яке задовольняє наступні умови:*

1) h — лінійне;

2) $h(\sigma)$ є продовженням псевдометрики σ на простір X для кожного $\sigma \in \mathcal{PM}'_c$;

3) h — неперервне відображення.

Питання існування лінійного неперервного оператора продовження з $(\mathcal{PM}_c, \mathcal{T}_F)$ у $(\mathcal{PM}_c(X), \mathcal{T}_F)$ для довільного локально компактного метризовного простору X залишається відкритим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Tymchatyn E. D., Zarichnyi M.* On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — V.132. — P.2799—2807.

2. *Flachsmeyer J.* Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Teilmengen // Math. Nachr. —1964. — B.26.— S.321—337.

3. *Holá L., McCoy R. A.* The Fell topology on $C(X)$ // Annals New York Academy of Science. —1992.— V.659. — P.99—110.

4. *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math.— 1988.— V.90.— P.69—86.

5. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of non-convex multi-valued maps // Studia Math.— 1983.— V.76.— P.163—174.

6. *Стасюк І.З.* Продовження напівнеперервних псевдометрик // Прикл. проблеми мех. і мат.— 2004.—Т.2.— С.88—95.

Стаття надійшла до редколегії 26.06.2006